Διαφ. Εξισώσεις

(E) $y' = f(x,y)$, συνεχής
(C) $y(x_0) = y_0$

Θεώρημα 1

Ας είναι $a, b > 0$ και $R = \{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \} \subseteq D_f$

Υποθέτουμε ότι η f πληροί μια συνθήκη Lipschitz στο R (K)

Θέτουμε $M = \max\limits_{R} |f(x,y)|$, $r = \min\{a, b/M\}$

Τότε το π.α.τ (E)−(C) έχει μοναδική λύση στο $I = [x_0 - r, x_0 + r]$

$$\varphi_0(x) = y_0, \quad \varphi_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\nu(s))\, ds, \quad x \in I$$

Επίσης, $|y(x) - \varphi_\nu(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{Kr}$, $x \in I$ $(\nu = 0, 1, \dots)$

Θεώρημα 2

Ας είναι $a > 0$ και $S = \{ |x - x_0| \leq a, \ y: \text{αυθαίρετο} \} \subseteq D_f$

Υποθέτω ότι η f είναι K-Lipschitz στο S. Τότε υπάρχει μοναδική λύση του Π.Α.Τ (E)−(C), $I = [x_0 - a, x_0 + a]$

$$\varphi_0(x) = y_0, \quad \varphi_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\nu(s))\, ds, \quad x \in I$$

Επίσης $|y(x) - \varphi_\nu(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(Ka)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{Ka}$, $x \in I$

$M = \sup\limits_{x \in I} |f(x, y_0)|$

Άσκηση (Για το Θ.1)

$y' = 1 + xy^2$

$y(0) = 0$

Λύση

Θεωρώ $R := \{ (x,y) : |x| \le a, \ |y| \le b \}$, $a, b > 0$

Είναι $f(x,y) = 1 + xy^2$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = |2xy| < 2ab$$

$k = 2ab$, $M = \max_R |f(x,y)| = \max_R |1 + xy^2| = 1 + ab^2$

$r = \min \left\{ a, \frac{b}{1+ab^2} \right\}$.

$$\frac{b}{1+ab^2} = \frac{b}{1+(\sqrt{a}b)^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{2\sqrt{a}b}{1+(\sqrt{a}b)^2} \le \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot 1$$

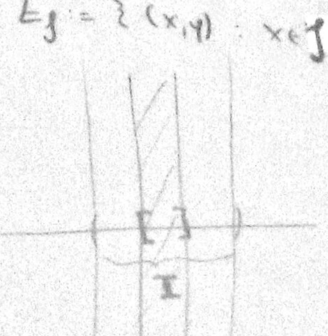
$1 = \sqrt{a}\, b \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{a}}$

άρα $a = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Θεώρημα 3

Ας είναι I: διάστημα $\subseteq \mathbb{R}$ (ανοιχτό) και $E := \{ (x,y) : x \in I, \ y \text{ αυθαίρετο} \} \subseteq D_f$

Αν για κάθε συμπαγές υποδιάστημα του I, η f πληροί μια συνθήκη Lipschitz στο $E_J := \{ (x,y) : x \in J, \ y \text{ αυθαίρετο} \}$, τότε το Π.Α.Τ (Ε)-(C) έχει μοναδική λύση στο I.



Άσκηση

$y' = \frac{\cos y}{1-x^2}$, $y(0)=2$, Νδο $\exists$ ακριβώς μια λύση στο $(-1,1)$

Λύση

$f(x,y) = \frac{\cos y}{1-x^2}$, $I = (-1,1)$, $I \times \mathbb{R} = D_f$

Ας είναι $J = [a,b] \subseteq I$, $-1 < a < b < 1$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{-\sin y}{1-x^2}\right| \leq \frac{1}{1-x^2} \leq \frac{1}{1-(\max\{|a|,|b|\})^2} = k_J$$

Θ.3 $\rightsquigarrow$ αφού υπάρχει συνθήκη k-Lipschitz για ένα συμπαγές υποδιάστημα του I, τότε $\exists$ μοναδ. λύση του Π.Α.Τ στο $(-1,1)$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$, $x \in I$, $f: I \times \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
$y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$

Παράδειγμα

$y_1' = \underbrace{2y_1 + x^2 y_2 + \cos x}_{f_1(x,y_1,y_2)}$

$y_2' = \underbrace{x^2 y_1 + \sin(y_2 + y_1) + x^3}_{f_2(x,y_1,y_2)}$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,y_1,y_2) \\ f_2(x,y_1,y_2) \end{bmatrix}$$

$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$\bar{y}' = \bar{f}(x,\bar{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x,\bar{y}) \\ f_2(x,\bar{y}) \end{bmatrix}$

$f: I \times \Omega \ , \ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$

$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$

$\vdots$

$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \ , \ \bar{f}(x, \bar{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x,\bar{y}) \\ \vdots \\ f_n(x,\bar{y}) \end{bmatrix}$$

$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y})$: Διανυσματική Εξίσωση

$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$

<u>Παράδειγμα</u>

$y_1' = 2x y_1^2 + y_2^3$

$y_2' = y_1 + \cos y_2$

$$\left.\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{01} \\ y_2(x_0) &= y_{02} \end{aligned}\right| \ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$$

• <u>Η συνθήκη Lipschitz στο $\mathbb{R}^n$</u>

$\|\bar{x}\|_1 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$\|\bar{x}\|_2 = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

$\|\bar{x}\|_n = |x_1| + \dots + |x_n|$

$\lambda \|\bar{x}\|_2 \le \|\bar{x}\|_1 \le k \cdot \|\bar{x}\|_2$

• <u>Η συνθήκη Lipschitz στο $A \subseteq D_f \subseteq I \times \mathbb{R}^n$</u>

$\exists k > 0 \quad \|\bar{f}(x,\bar{y}) - \bar{f}(x,\bar{z})\| \le k \|\bar{x} - \bar{y}\| \ , \ \forall \bar{x}, \bar{y} \in A$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ας είναι $\bar{R} = \{(x,\bar{y}) : \|x-x_0\| \le a,\ \|y-y_0\| \le b\}$. Η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο R αν οι $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο $\bar{R}$, με $k = \max_{R} \left|\frac{\partial f}{\partial y_i}\right|$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$g(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} x^2 + y_1^2 \\ x^2 e^{x+y_2} \end{pmatrix} \qquad R := \{ |x| \le 1 \ ,\ \|\bar{y}\| = |y_1| + |y_2| \le 1 \}$$

Λύση

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y_1}(x,\bar{y})\right| = \left\| \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \le |2y_1| \le 2$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y_2}(x,\bar{y})\right| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 e^{x+y_2} \end{pmatrix} \right\| \le |x^2 e^{x+y_2}| \le e^2$$

$\to k = \max\{2, e^2\}$

Θεώρημα

Ας είναι $a, b > 0$ και $R = \{ |x-x_0| \le a \ ,\ |\bar{y} - \bar{y}_0| \le b \} \subseteq D_f$

Υποθ. ότι η f πληροί μια συνθήκη Lipschitz στο R(k). Θέτουμε $M = \max_{R} |\bar{f}(x,\bar{y})|$, $r = \min\{a, b/M\}$. Τότε το Π.Α.Τ (Ε)-(Σ) έχει μοναδική λύση στο $I = [x_0 - r, x_0 + r]$

$$\varphi_0(x) = y_0 \ ,\ \bar{\varphi}_{v+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{f}(s, \bar{\varphi}_v(s))\, ds \ ,\ x \in I$$

Επίσης $|\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}_v(x)| \le \frac{M}{k} \frac{(kr)^{v+1}}{(v+1)!} e^{kr}$, $x \in I$ $(v = 0, 1, \ldots)$

Παραδείγματα

$y_1' = y_2^2$	$y_1(0) = 0$	$x_0 = 0$
$y_2' = x + y_1^2$	$y_2(0) = 0$	$\bar{\varphi}_0 = (0,0)$

$\bar{y} = f(x,\bar{y}) = \begin{pmatrix} y_2^2 \\ x+y_1^2 \end{pmatrix}$

$a,b>0 \rightsquigarrow R=\{(x,y) : |x|\le a \,,\ \|\bar{y}\|\le b\}$, $\|\bar{y}\| = \sqrt{y_1^2+y_2^2} \le b$

$\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial y_1}(x,\bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial y_2}(x,\bar{y}) = \begin{pmatrix} 2y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M = \sup\limits_{R} \|f(x,\bar{y})\| = \sup\limits_{R} \left\| \begin{pmatrix} y_2^2 \\ x+y_1^2 \end{pmatrix} \right\| = \sup\limits_{R} \left(\sqrt{(y_2^2)^2 + (|x|+y_1^2)^2} \right) \le \sup\left(y_2^2+y_1^2+|x|\right) = b^2+a$

$r = \min\{a, b/(a+b^2)\}$

$\rightsquigarrow [-r,r]$

<u>Θεώρημα</u>

Ας είναι $a>0$ και $S' = \{|x-x_0|\le a,\ \bar{y} :$ αυθ$\} \subseteq D_f$

Υποθ. ότι η f είναι k-Lipschitz στο S'. Τότε υπάρχει μοναδική λύση του Π.Α.Τ (Ε)-(C), $I=[x_0-a, x_0+a]$

$\varphi_0(x) = y_0$, $\bar{\varphi}_{r+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{f}(s, \bar{\varphi}_r(s))\, ds$, $x\in I$

Επίσης $|\bar{y}(x) - \bar{\varphi}_r(x)| \le \dfrac{M}{k} \dfrac{(ka)^{r+1}}{(r+1)!} e^{ka}$, $x \in I$

$M = \sup\limits_{x\in I} |\bar{f}(x,y_0)|$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Παράδειγμα

ΠΑΤ $\begin{cases} y'' + 3x^2(y')^2 + 3y^2 \sin x = x^2 + 1 \\ y(0) = 1 \quad , y'(0) = 2 \end{cases}$, λύνεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα

$y(x_0) = y_{01}, \; y'(x_0) = y_{02} , \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}$, $D_f \subseteq I \times R^n$, f συνεχής

$$y^{(n)} = f(x, \underset{y_1}{\underset{\downarrow}{y}}, \underset{y_2}{\underset{\downarrow}{y'}}, \dots, \underset{y_n}{\underset{\downarrow}{y^{(n-1)}}})$$

$y_1' = y_2$

$y_2' = y_3$

$y_3' = y_4$

$\vdots$

$y_{n-1}' = y_n$

$y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y})$$

$$y^{(n)} = p_1 y + p_2 y' + \dots + p_{n-1} y^{n-1}$$

$$\bar{y} = f(x, y_1, \dots, y_n) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_{n-1} y_n$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_i} = p_i$$

όλες οι γραμμικές εξισώσεις έχουν μοναδικές λύσεις στο διάστημά τους, αρκεί αυτές να είναι φραγμένες.